

## Kesulitan Mahasiswa Dalam Pembuktian Matematis: Problem Matematika Diskrit

Abdul Mujib<sup>1</sup>

Jurusan Pendidikan Matematika, Universitas Muslim Nusantara Al Washliyah  
Jalan Garu II No. 93, Medan, Sumatera Utara, 20147, Indonesia.<sup>1</sup>  
Email : mujib\_umnaw@yahoo.co.id Telp : +6285745678240

### Abstrak

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada matakuliah Matematika Diskrit. Metode kualitatif digunakan untuk menjawab pertanyaan penelitian. Subjek dalam penelitian ini terdiri dari 10 mahasiswa laki-laki dan 26 mahasiswa perempuan. Data dianalisis berdasarkan hasil test dan wawancara dengan beberapa mahasiswa. Hasil penelitian menunjukkan terdapat empat kesulitan utama yang dihadapi mahasiswa: (1) memahami konsep matematika, (2) Bahasa dan notasi matematis, (3) minimnya strategi bukti matematis, dan (4) kesulitan dalam membaca bukti matematis. Selain itu, persepsi siswa tentang bukti matematis juga menjadi salah satu faktornya dan menulis bukti matematis secara formal menjadi salah hambatan belajar mahasiswa.

**Kata Kunci :** kesulitan mahasiswa, bukti matematis, matematika diskrit.

## Student Difficulties in Mathematical Proof: Discrete Mathematics Problem

### Abstract

This study aims to analyze student difficulties in constructing a mathematical proof in Discrete Mathematics subjects. Qualitative methods are used to answer research questions. This study involved the sixth-semester students of the University of Muhammadiyah Tangerang who administered Discrete Mathematics subjects. The subjects in this study consisted of 10 male students and 26 female students. Data were analyzed based on test results and interviews with several students. The results showed that there are four main difficulties by students: (1) understanding mathematical concepts, (2) language and mathematical notation, (3) the lack of mathematical proof strategies, and (4) difficulties in reading the mathematical proof. In addition, the students' perception of mathematical proof also be one factor and write a formal mathematical proof to be one of the students' learning obstacles.

**Keywords :** student difficulties, mathematical proof, discrete mathematics.

## PENDAHULUAN

Berbicara matematika tingkat perguruan tinggi, tidak terlepas dari kemampuan pembuktian (Anwar dkk, 2018). Pembuktian merupakan salah satu kemampuan matematika tingkat lanjut yang dirasakan sebagai kemampuan paling sulit untuk dicapai oleh sebagian besar mahasiswa (Moore, 1994; Weber, 2001; Pfeifer, 2009; Mujib & Suparingga 2013; Mujib & Darhim, 2015; Mujib, 2017). Beberapa penelitian menunjukkan bahwa kemampuan pembuktian siswa, bahkan mahasiswa, masih rendah (Kusnandi, 2008; Pfeifer, 2009; Schwarz & Kaiser, 2009; Mujib 2016; Mujid dkk, 2016). Topik matematika yang dikaji juga beragam seperti teori bilangan, kalkulus, geometri, analisis real dan struktur aljabar. Kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis masih jarang yang mengkaji pada matakuliah matematika diskrit.

Matematika diskrit merupakan salah satu matakuliah yang tidak lepas dari masalah pembuktian, walaupun matematika diskrit lebih banyak mengkaji tentang menghitung, komputasi algoritmik, dan penerapannya dalam kehidupan sehari-hari (Gosset, 2003). Tetapi, selain kajian tersebut, konsep mendasar dari matematika yaitu kemampuan membuktikan merupakan masalah penting yang harus dikuasai oleh mahasiswa dalam mempelajari matematika diskrit. Matakuliah matematika diskrit merupakan matakuliah yang diberikan pada tingkat akhir di program studi Pendidikan Matematika yang tidak luput dari mempelajari bukti-bukti matematis, walaupun matematika diskrit lebih dikenal sebagai matematika terapan yang sangat penting dalam kehidupan kita. Misalnya aplikasi teknologi smartphone, sistem jaringan komunikasi, dan lainnya sangat berkaitan dengan matematika diskrit. Tetapi sebelum mencapai tahap itu, konsep-konsep matematika diskrit berkaitan dengan teorema-teorema yang perlu di buktikan secara matematis. Sehingga kemampuan pembuktian sangat diperlukan dalam mempelajari matakuliah ini. Dan karakter matakuliah ini yang bersifat diskrit, sehingga memerlukan kreatifitas tertentu oleh mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti. Pembahasan tentang bukti dan proses pembuktian dari pernyataan-pernyataan matematis merupakan bagian penting dalam matakuliah ini. Sehingga

kebutuhan akan intelektualitas menjadi perhatian dalam matakuliah ini.

Kajian tentang kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis merupakan sangat penting (Perbowo & Pradipta, 2017). Ketika kita mengetahui kesulitan yang dihadapi mahasiswa dengan baik, maka kita dapat memberikan solusi yang tepat bagi mahasiswa (Simalango dkk, 2018). Untuk itu, mengkaji kesulitan-kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada matakuliah matematika diskrit menjadi suatu keharusan sebagai dasar acuan bagi dosen dalam mengajarkan konsep pembuktian secara umum khususnya pada matakuliah matematika diskrit. Ada beberapa pertanyaan penelitian yang diajukan:

1. Apa yang menjadi kesulitan mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis pada matakuliah matematika diskrit?

Apa yang menyebabkan mahasiswa mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti matematis?

## METODE

Sesuai dengan tujuan penelitian yaitu menganalisis kesulitan siswa dalam mengkonstruksi bukti matematis, penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif deskriptif (Yusuf, 2016). Penelitian ini dilakukan di Universitas Muhammadiyah Tangerang pada mahasiswa yang sedang mengampu matakuliah matematika diskrit. Mereka adalah mahasiswa tahun ketiga sebanyak 36 orang yang terdiri 10 laki-laki dan 26 perempuan.

Data diperoleh berdasarkan hasil tes terakhir pembelajaran dan hasil analisis wawancara terhadap mahasiswa yang mengalami kesulitan dalam mengkonstruksi bukti matematis pada matakuliah matematika diskrit.

Soal tes terdiri dari 4 soal tentang pembuktian pada materi matematika diskrit. Soal tersebut sebelumnya telah dilakukan uji coba soal dan telah dilakukan uji divalidasi.

Instrumen yang terdiri dari 4 item berdasarkan hasil validasi diperoleh satu soal kategori sukar, satu soal kategori sedang, dan dua soal kategori mudah. Instrumen ini digunakan untuk mengukur kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti matematis. Adapun soal yang digunakan dalam

penelitian ini ditunjukkan pada Tabel 1 berikut ini:

**Tabel 1. Empat Proposisi yang Digunakan dalam Penelitian**

No	Soal	Kategori
1	Diberikan bilangan bulat positif $n, r$ . Buktikan bahwa $r \binom{n+1}{r} = (n+1)r - 1$ dengan strategi/pendekatan aljabar dan argument kombinatorika	Susah
2	Buktikan bahwa $1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{n+2}{2}$ untuk $n \in \mathbb{N}$	Sedang
3	Misalkan $ A  = x,  B  = y,  A \cap B  = z$ , dimana $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ . Buktikan $ A \cup B  = x + y - z$	Mudah
4	Buktikan bahwa setiap himpunan yang terdiri dari tiga elemen bilangan bulat positif, selalu memuat dua bilangan yang jumlahnya genap	Mudah

Partisipan dibagi kedalam tiga kelompok yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Pembagian kelompok berdasarkan IPK mahasiswa (Asroni & Adrian, 2016). Distribusi mahasiswa dapat dilihat pada Tabel 2. Berdasarkan Table 2, mahasiswa dikelompokkan dalam tiga kategori yaitu rendah (10 mahasiswa), sedang (21 mahasiswa), dan tinggi (6 mahasiswa). Para partisipan diberikan test untuk mengukur kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti matematis pada matakuliah matematika diskrit. Tes diberikan di akhir perkuliahan yang dilakukan selama 14 kali pertemuan.

Kemampuan membaca bukti matematis seorang mahasiswa adalah ketika mahasiswa

tersebut dapat mengemukakan gagasan/ide yang termuat dalam bukti tersebut baik secara lisan maupun tulisan dengan menggunakan bahasanya sendiri dan memahaminya apa yang termuat dalam bukti matematis tersebut (Suryana, 2015). Indikator membaca bukti sebagai berikut:

1. Kemampuan menerapkan tahapan-tahapan pembuktian pernyataan ke dalam pernyataan lain yang serupa;
2. Kemampuan menggunakan definisi sebagai acuan dalam memberikan alasan terkait langkah pembuktian yang benar atau perbaikan terkait simbol, narasi, premis jika tahapan bukti kurang tepat;
3. Membuat suatu hipotesis (konjektur) berdasarkan pola dan sifat dari beberapa pernyataan dan membuktikan konjektur yang diperoleh tersebut secara deduktif.

Sedangkan indikator kemampuan mengkonstruksi suatu bukti yaitu (Darmawan, 2017):

1. Kemampuan mengorganisasikan dan memanipulasi fakta-fakta, serta mengurutkan langkah-langkah bukti yang diberikan untuk konstruksi bukti yang valid;
2. Kemampuan yang membuat kaitan antara fakta-fakta yang diketahui dalam pernyataan dengan unsur-unsur yang hendak dibuktikan;
3. Kemampuan menggunakan premis, definisi, atau teorema-teorema yang terkait pernyataan untuk membangun suatu pembuktian.

**Tabel 2. Kelompok Mahasiswa**

Kelompok	Interval		
	Hasil Tes	Mahasiswa	%
Rendah	8 - 13	10	25
Sedang	14 - 23	21	52.5
Tinggi	24 - 28	6	15

Keterangan: Skor ideal 40

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

Hasil tes dianalisis berdasarkan kesulitan-kesulitan yang dialami mahasiswa dalam membaca dan mengkonstruksi bukti matematis. Partisipan dibagi kedalam tiga kelompok yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Kemudian setiap kelompok dianalisis kesulitan-

kesulitan yang mereka hadapi dalam mengkonstruksi bukti. Selain itu, dilakukan wawancara terhadap beberapa partisipan baik di kelompok tinggi, sedang, maupun rendah.

**Tabel 3. Data Deskriptif**

No	Statistik	Nilai
1	Jumlah mahasiswa	36
2	Maksimum	28
3	Minimum	8
4	Skor ideal	40
5	Rata-rata	18,22
6	Simpangan baku	5,28
7	Q <sub>1</sub> ; Q <sub>2</sub> ; Q <sub>3</sub>	14; 18; 23

Table 3 merepresentasikan data kuantitatif yang diperoleh mahasiswa dalam membaca bukti dan mengkonstruksi bukti proposisi yang diberikan. Nilai maksimum yang dicapai oleh mahasiswa adalah 28 (70% dari skor ideal 40) dan nilai minimum adalah 8 (20% dari skor ideal 40) dengan rata-rata 18,22 (45,55%). Hal ini menunjukkan bahwa performa mahasiswa dalam membaca dan mengkonstruksi bukti masih rendah. Sebagian besar mahasiswa tidak dapat membuktikan keempat proposisi dengan baik.

Berikut ini akan dijelaskan kesulitan-kesulitan yang dihadapi ketiga kategori mahasiswa tersebut.

Kelompok rendah adalah kelompok yang memperoleh skor 8 sampai 13 (20% - 32.5%) yang terdiri dari 10 mahasiswa. Semua mahasiswa pada kelompok ini tidak dapat membuktikan keempat proposisi dengan baik. Mereka tidak memahami masalah, tidak memiliki strategi pembuktian, bahkan tidak mempunyai motivasi untuk mengerjakan soal-soal yang diberikan.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1}. (a) \quad r \binom{n}{r} &= (n+1) \binom{n}{r-1} \\
 &\Rightarrow (n+1)! \frac{n!}{(r-1)!r!} \\
 &\Rightarrow (n+1)! \frac{n!}{(r-1)!(r-1)!} \\
 &\Rightarrow (n+1) \binom{n}{r-1}
 \end{aligned}$$

Gambar 1. Hasil kerja mahasiswa kategori rendah

Gambar 1 merupakan salah satu hasil kerja mahasiswa kelompok rendah. Gambar 1 menunjukkan bahwa mereka tidak memahami masalah yang diberikan, tidak tahu definisi dan

symbol kombinasi. Sehingga hasil yang dikerjakan tidak memiliki makna sama sekali.

Mereka merasa kesulitan belajar matematika dan menganggap matematika itu sulit. Berikut ini hasil wawancara dengan salah satu mahasiswa pada kategori rendah:

T : Bagaimana soal tes tadi?  
 S : ouuuh... sangat sulit.  
 T : bagian mana yang sulit?  
 S : semua sulit pak  
 T : kamu belajar tidak sebelum ujian?  
 S : tidak...  
 T : kenapa?  
 S : malas pak..  
 T : kenapa?  
 S : saya kurang suka dengan matematika diskrit, apalagi soal membuktikan.  
 T : ok..., sebenarnya kamu suka matematika ngak?  
 S : ngak suka..  
 T : ok... terima kasih

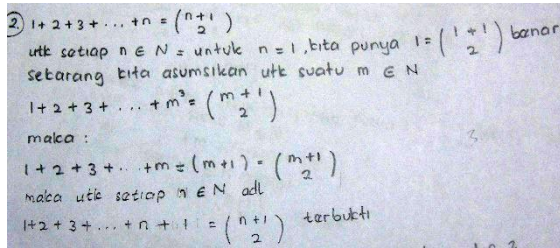
Sedikit berbeda dengan kelompok sedang yang memperoleh skor 14 sampai 23 (35%-52.5%) dari skor ideal 40. Kelompok sedang terdiri dari 21 mahasiswa. Kesulitan-kesulitan yang mereka hadapi dalam membaca bukti dan konstruksi bukti adalah pengetahuan matematika yang rendah, salah dalam memaknai symbol-simbol matematika, dan sedikitnya pengetahuan strategi bukti matematis.

penyelesaian  
 Misal: A = {2, 3, 5}  
 2+3 = 5 ganjil  
 3+5 = 8 genap  
 2+5 = 7 ganjil  
 ∴ himpunan yang terdiri dari 2 elemen bilangan bulat positif selalu memuat dua bilangan yang jumlahnya ganjip.

Gambar 2. Hasil kerja mahasiswa kategori sedang

Sebagian besar mereka tidak terbiasa menghadapi masalah matematika khususnya masalah pembuktian. Sehingga mereka tidak tahu apa yang harus dilakukan pertama kali dalam membuktikan soal. Hal ini diakibatkan karena kurangnya pemahaman terhadap masalah bukti, dan penulisan bukti yang baik. Gambar 2 menunjukkan hasil kerja mahasiswa untuk proposisi no. 4. Berdasarkan gambar 2, mahasiswa kurang memahami soal sehingga membuktikannya dengan strategi contoh penyangkal. Menulis bukti diawali dengan kata

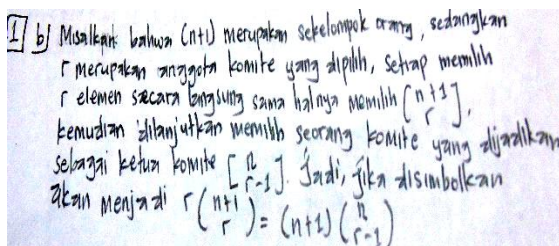
“peenyelesaian” seharusnya “bukti” ini menunjukkan mereka tidak biasa melakukan pembuktian.



Gambar 3. Hasil Kerja mahasiswa kelompok sedang untuk soal no. 2

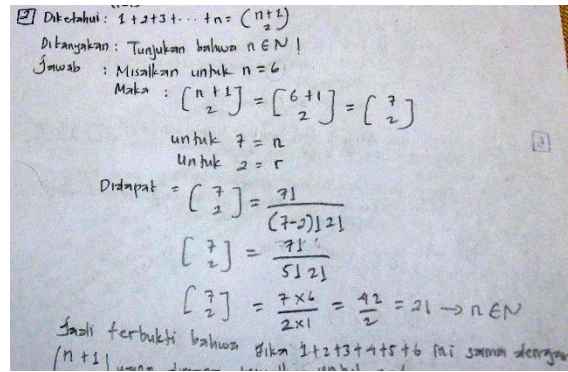
Selain itu, mereka mengetahui strategi yang akan digunakan, tetapi kebingungan apa yang akan dilakukan. Mereka tidak bisa memanfaatkan fakta yang ada dan kesulitan mengkaitkan kalimat secara logis (lihat Gambar 3).

Kelompok tinggi terdiri dari 6 mahasiswa dengan skor 24-28 (60%-70% dari skor ideal 40). Mereka mampu memahami masalah matematika dengan baik, memiliki strategi bukti yang variatif, dan mampu mengkaitkan fakta-fakta yang ada. Tetapi mereka masih kurang dalam penulisan bukti yang baik dan mereka masih kesulitan dalam mengkonstruksi bukti menggunakan argument kombinatorik.



Gambar 4. Hasil Kerja Mahasiswa kelompok tinggi untuk soal no. 1

Gambar 4 diatas menunjukkan bahwa mahasiswa masih belum memahami symbol-simbol kombinasi dengan baik, sehingga mereka kesulitan membuktikan proposisi menggunakan argument kombinatorika. Selain itu, berdasarkan gambar 2, mahasiswa masih lemah dalam menulis bukti yang baik, bukti tidak diawali dengan fakta-fakta yang ada, dan apa yang akan dibuktikan, dan tidak diberikan kesimpulan apa yang telah dibuktikan.



Gambar 5. Hasil Kerja Mahasiswa untuk soal no. 2

Kesalahan fatal yang sering dilakukan di semua kelompok adalah membenarkan masalah yang akan dibuktikan dengan memberikan contoh. Gambar 5 menunjukkan bahwa siswa membenarkan proposisi no 2 untuk  $n = 6$  dengan melakukan perhitungan  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21 = \binom{7}{2}$ .

Berdasarkan penjelasan hasil penelitian. Hasil penelitian ini konsisten dengan hasil penelitian-penelitian sebelumnya pada matakuliah yang lain. Hasil penelitian Weber (2001) menyatakan bahwa kegagalan siswa dalam mengkonstruksi bukti karena mereka tidak dapat menggunakan sintak pengetahuan yang mereka miliki. Oleh karena itu, “strategic knowledge” berperan penting dalam mengkonstruksi bukti. Berdasarkan hasil studi yang dilakukan oleh Sabri (Kusnansi, 2008) terhadap konsep pembuktian matematika, mahasiswa calon guru disarankan agar kurikulum sekolah menengah atas hendaknya mempersiapkan siswa lebih baik lagi dalam pembelajaran pembuktian matematika. Selain itu, Recio, A.M. & Godino (2001) menemukan bahwa kemampuan mahasiswa untuk menghasilkan bukti secara deduktif masih sangat terbatas. Sedangkan Selden & Selden (Weber, 2001) menyatakan bahwa mahasiswa tidak dapat menentukan apakah bukti yang dimaksud sah atau tidak. Dengan adanya kesulitan yang dialami mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti matematis, hal ini mengurasi rasa percayadiri mereka untuk menyatakan apakah bukti yang di kerjakan valid atau tidak. Hal ini merupakan masalah baru yang muncul dari hasil penelitian ini. Sebagaimana yang dinyatakan oleh Muhammad (2017) bahwa percaya diri dapat mempengaruhi hasil belajar siswa.

**SIMPULAN**

Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti matematis mahasiswa rendah. Kesulitan-kesulitan yang dihadapi mahasiswa dalam mengkonstruksi bukti diantaranya: (1) memahami konsep matematika, (2) Bahasa dan symbol matematika, (3) strategi bukti matematis, dan (4) membaca bukti. Selain itu, persepsi siswa tentang bukti matematis juga menjadi salah satu faktornya dan menulis bukti matematis secara formal menjadi salah satu hambatan belajar mahasiswa.

Penelitian ini dilakukan di kampus swasta dengan latarbelakang minim pengalaman dalam mengkonstruksi bukti. Untuk itu, perlu dilakukan perbandingan untuk mahasiswa dari kampus yang memiliki kualitas pengalaman membuktikan yang lebih baik. Selain itu, perlu dilakukan kajian tentang *believe* siswa terhadap bukti matematis yang dihasilkannya.

**DAFTAR PUSTAKA**

- Anwar, L., Nasution, S. H., Sudirman, S., & Susiswo, S. (2018). Proses Berpikir Mahasiswa Dalam Membuktikan Proposisi:Konseptualisasi-Gambar. *Jurnal Kajian Pembelajaran Matematika*, 2(2), 46-56.
- Aroni, A., & Adrian, R. (2016). Penerapan metode K-means untuk clustering mahasiswa berdasarkan nilai akademik dengan Weka Interface studi kasus pada jurusan Teknik Informatika UMM Magelang. *Jurnal Semesta Teknika*, 18(1), 76-82.
- Darmawan, P. (2017). Berpikir Analitik Mahasiswa dalam Mengonstruksi Bukti Secara Sintaksis. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(2), 154-165.
- Gosset, E. (2003). *Discrete Matheamtics with Proof*. New Jersey: Pearson Education inc.
- Kusnandi. (2008). *Pembelajaran Matematika dengan Strategi Abduktif-Deduktif untuk menumbuhkembangkan Kemampuan Membuktikan pada Mahasiswa*. (Unpublished Disertation). Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung.
- Moore, R.C. (1994). "Making the Transition to Formal Proof". *Educational Studies in Mathematics*, 27, (3),249-266.
- Mujib, A., & Suparingga, E. (2013, November). Upaya Mengatasi Kesulitan Siswa dalam Operasi Perkalian dengan Metode Latis. *In Makalah Dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*.
- Mujib A., Darhim. (2015). Analysis Of Student Difficulties In Constructing Mathematical Proof On Discrete Mathematics Course. *Proceeding MSCEIS 2015*, 49-55
- Mujib, A., Darhim, Kartasasmita, B. G. (2016). Evaluate the process of creative thinking of students in constructing mathematical proof. *International Journal of Education and Research*. 4 (11), 287-296.
- Mujib, A. (2016). Pengembangan Kemampuan Pembuktian dalam Matematika Diskrit Menggunakan Pengajaran Berbasis DNR. *Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika (SNMPM) 2016 "Strategi Mengembangkan Kualitas Pembelajaran Matematika Berbasis Riset"*. 1, 122-138.
- Mujib, A. (2017). Identifikasi Miskonsepsi Mahasiswa Menggunakan CRI pada Mata Kuliah Kalkulus II. *Mosharafa: Jurnal Pendidikan Matematika*, 6(2), 181-192.
- Muhamad, N. (2017). Pengaruh Metode Discovery Learning untuk Meningkatkan Representasi Matematis dan Percaya Diri Siswa. *Jurnal Pendidikan UNIGA*, 10(1), 9-22.
- Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). Pemetaan Kemampuan Pembuktian Matematis Sebagai Prasyarat Mata Kuliah Analisis Real Mahasiswa Pendidikan Matematika. *KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika*, 2(1), 81-90.
- Pfeifer, K. (2009). "The Role of Proof Validation in Students' Mathematical Learning". *Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 29, (3), 79-84.
- Recio, A.M. & Godino, J.D. (2001). Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*. 48. 83-99.
- Schwarz, B. & Kaiser, G. (2009). "Profesional Competence of Future Mathematics Teachers on Argumentation and Proof and How Evaluate It". *Proceeding of ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education*, 190-195.

- Simalango, M. M., Darmawijoyo, D., & Aisyah, N. (2018). Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal-Soal Pisa pada Konten *Change And Relationship* Level 4, 5, dan 6 di SMPN 1 Indralaya. *Jurnal Pendidikan Matematika*, 12(1), 43-58.
- Suryana, A. (2015). Analisis kemampuan membaca bukti matematis pada mata kuliah statistika matematika. *Infinity Journal*, 4(1), 84-95.
- Weber, K. (2001). Student Difficulty in constructing Proof: the need for Strategic Knowledge. *Educational Studies in Mathematics*. 48. 101-119.
- Yusuf, A. M. (2016). *Metode penelitian kuantitatif, kualitatif & penelitian gabungan*. Prenada Media.